PHYSIK
Gekoppelte Bewegungen
1

Gekoppelte Bewegungen auf
horizontaler Ebene

Noch keine Korrektur gelesen (3.11.02)

Die kompletten Lösungen sowie
die Möglichkeit des Ausdruckens
gibt es auf der Mathematik-CD
(www.mathe-aufgaben.de)

Datei Nr. 91131

Friedrich W. Buckel

Oktober 2002

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhalt

Bemerkung

Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Formel (im Volksmund auch „Mitternachtsformel“ genannt, wird von mir ausschließlich verwendet. In nicht wenigen Aufgaben ist sie der leider zu oft eingesetzten p-q-Formel deutlich überlegen.

1. Grundlagen

VORAUSGESETZTES WISSEN:

(1) Das **Newtonsche Kraftgesetz** beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Kraft, die auf eine Masse wirkt und die daraus resultierende Beschleunigung (die auch als Bremsverzögerung wirken kann, wenn sie der Bewegungsrichtung entgegen wirkt).

$$\boxed{F = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m}}$$

(2) Wenn Reibung im Spiel ist, wirkt die **Reibungskraft** stets bremsend. Man berechnet sie durch die Formel

$$\boxed{F_R = f \cdot N}$$

wobei N die Normalkraft ist. Darunter versteht man die Kraft, die den Körper senkrecht gegen die Unterlage drückt. Bewegt sich der Körper auf horizontaler Unterlage, dann ist die Normalkraft natürlich die Gewichtskraft $G = mg$.

Auf einer horizontalen Ebene wird somit die Reibungskraft durch diese Gleichung berechnet:

$$\boxed{F_R = f \cdot G = f \cdot m \cdot g}$$

(3) Ist der Körper in Ruhe, dann wirkt zunächst die Haftreibungskraft. Ist er in Bewegung, dann die Gleitreibungskraft, oder die Rollreibungskraft.

Der Reibungskoeffizient f ist am kleinsten bei der Rollreibung und am größten bei der Haftreibung.

(4) Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gelten diese Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= v(0) \pm a \cdot t \\ s(t) &= v(0) \cdot t \pm \tfrac{1}{2} a t^2 \end{aligned}}$$

Das Minuszeichen gilt bei einer verzögerten Bewegung.

(5) Wird nichts anderes gesagt, rechnen wir immer mit $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

2. Bewegung ohne äußeren Antrieb

Nehmen wir an, ein Körper bewege sich zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $v(0)$ oder v_o . Er gleite über eine waagerechte Ebene und wird alleine durch die Gleitreibungskraft beeinflußt. Dann wirkt diese als Bremsverzögerung und verlangsamt die Bewegung bis zum Halten.

BEISPIEL 1:

Es sei $v(0) = 4\,\frac{m}{s}$ und $f = 0{,}25$.
Dann erhält man eine Bremsverzögerung von

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{f \cdot N}{m} = \frac{f \cdot G}{m} = \frac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g \approx 0{,}25 \cdot 10\,\frac{m}{s^2} = 2{,}5\,\frac{m}{s^2}.$$

Man beachte, daß die Masse des Körpers dabei keine Rolle spielt !!!

Damit erhält man diese Bewegungsgleichungen:

$$v(t) = 4\,\frac{m}{s^2} - 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t \qquad (1)$$

$$s(t) = 4\,\frac{m}{s} \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

d,h,

$$s(t) = 4\,\frac{m}{s} \cdot t - 1{,}25\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

Jetzt können wir verschiedene Fragestellungen beantworten:

(a) Wie weit ist das Fahrzeug nach 1 s gekommen und welche Geschwindigkeit hat es dann ?

$$s(1\,s) = 4\,\frac{m}{s} \cdot 1\,s - 1{,}25\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s^2 = (4 - 1{,}25)\,m = 2{,}75\,m$$

$$v(1\,s) = 4\,\frac{m}{s^2} - 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s = 1{,}5\,\frac{m}{s}.$$

Hinweis: Stellt man dieselbe Aufgabe mit $t = 3$ s, erlebt man diese Überraschung:

$$s(3\,s) = 4\,\frac{m}{s} \cdot 3\,s - 1{,}25\,\frac{m}{s^2} \cdot 9\,s^2 = 0{,}75\,m$$

und gar dieses:

$$v(3\,s) = 4\,\frac{m}{s^2} - 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 3\,s = -3{,}5\,\frac{m}{s}$$

Hier ist folgendes passiert. Der abgebremste Körper kommt irgendwann zur Ruhe. Beachtet man das rechnerisch nicht, und läßt die nach rückwärts wirkende Bremsverzögerung weiter einwirken, dann agiert diese (natürlich nur mathematisch) als Beschleunigung, so daß der Körper sich scheinbar in die entegegengesetzte Richtung in Bewegung setzt, wodurch er algebraisch eine negative Geschwindigkeit erhält. Um dies genauer untersuchen zu können lösen wir erst diese Aufgabe:

(b) Berechne den Bremsweg und die Bremsdauer.

Am Ende des Bremsweges hält der Körper, d.h. er hat nach der Bremsdauer T die Geschwindigkeit $v(T)=0$. Aus Gleichung (1) folgt damit:

$$v(T)=4\tfrac{m}{s^2}-2{,}5\tfrac{m}{s^2}\cdot T=0 \;\Rightarrow\; 2{,}5\tfrac{m}{s}\cdot T=4\tfrac{m}{s} \;\Rightarrow\; T=\frac{4}{2{,}5}s=1{,}6\ s$$

In dieser Zeit legt er also den Bremsweg zurück:

$$s(T)=4\tfrac{m}{s}\cdot 1{,}6s-1{,}25\tfrac{m}{s^2}\cdot(1{,}6s)^2=3{,}2\ m$$

Hinweis. Für diese Aufgabe gibt es eine trickreiche Kurzlösung.

Man denke sich den Bremsvorgang gefilmt. Läßt man diesen Film rückwärts laufen, sieht man eine aus der Ruhe heraus gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Für diese Bewegung aus der Ruhe heraus gelten einfachere Gleichungen, etwa diese: $v=\sqrt{2as}$.

Wir stellen diese Gleichung nach s um und setzen für v die Geschwindigkeit $v(0)=4\tfrac{m}{s}$ *ein. Dann folgt die zugehörige Wegstrecke, also unser Bremsweg:*

$$s=\frac{v^2}{2a}=\frac{16\tfrac{m^2}{s^2}}{2\cdot 2{,}5\tfrac{m}{s^2}}=3{,}2\ m$$

Sucht man die Bremsdauer, dann folgt aus

$$s=\tfrac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; T=\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3{,}2}{2{,}5}}\ s=1{,}6\ s$$

Verwendet man diese Methode, sollte man dazu schreiben, daß man die umgekehrte Bewegung durchrechnet !

(c) Zurück zum Hinweis in (a). Dort haben wir berechnet:

$$s(3\ s)=4\tfrac{m}{s}\cdot 3\ s-1{,}25\tfrac{m}{s^2}\cdot 9\ s^2=0{,}75\ m$$

und $$v(3\ s)=4\tfrac{m}{s^2}-2{,}5\tfrac{m}{s^2}\cdot 3\ s=-3{,}5\tfrac{m}{s}$$

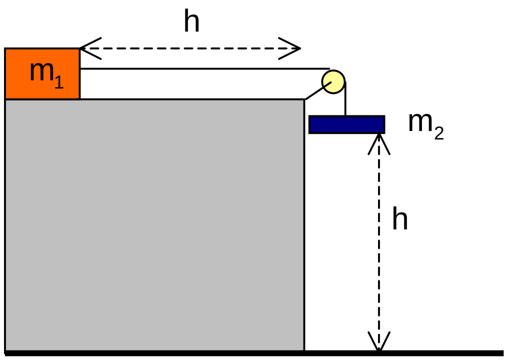
Nun wissen wir, daß der Körper nach 1,6 s und 3,2 m anhält. Würde die Bremsverzögerung nun in gleicher Stärke als Rückwärts-Beschleunigung weiter wirken, hätten wir eine beschleunigte Bewegung aus der Ruhe. Und diese muß dann noch 1,4 s lang wirken, bis 3 s vergangen sind. In dieser Zeit legt der Körper diese Strecke zurück: $s^*=\tfrac{1}{2}at^2=1{,}25\tfrac{m}{s^2}\cdot(1{,}4s^2)=2{,}45\ m$

Diese Strecke rechnen wir rückwärts, dann sind wir 3,2 m – 2,45 m = 0,75 m vom ursprünglichen Startpunkt entfernt !!

Und die Geschwindigkeit beträgt dann $v^*=2{,}5\tfrac{m}{s}\cdot 1{,}4s=3{,}5\tfrac{m}{s}$, genau der Wert, den wir auch anders erhalten haben. Die Interpretation mit der zu lange wirkenden Bremsverzögerung führt also tatsächlich zu diesen Ergebnissen.

3. Bewegung mit äußerem Antrieb

BEISPIEL 2:



Ein auf einer waagerechten Ebene liegender Körper der Masse $m_1 = 0{,}2$ kg wird über ein masseloses Seil an einen nach unten ziehenden Körper der Masse $m_2 = 0{,}1$ kg angekoppelt.

Wir gehen davon aus, daß sich die gesamte Anordnung in Bewegung setzt.

Auf der horizontalen Fläche herrscht Reibung mit der Gleitreibungszahl $f = 0{,}2$.

a) Berechne die Beschleunigung der Anordnung
b) Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit setzt m_2 unten auf , wenn h = 1 m ist.
c) Welche Kraft muß das Seil übertragen (also aushalten) ? SEILKRAFT !!!

LÖSUNG:

a) Wir berechnen die Beschleunigung mit dem Newtonschen Kraftgesetz. Die Beschleunigungskraft ist nun die Antriebkraft minus der Bremskraft. Als Antriebskraft verwenden wir die Gewichtskraft der Masse m_2, also Bremskraft die Gleitreibungskraft der Masse m_2 .
Die Antriebskraft $F = G_2 - R_1$ wirkt auf beide Massen, daher folgt

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G_2 - R_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g - f m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - f m_1}{m_1 + m_2} \cdot g = 2\,\tfrac{m}{s^2}$$

b) Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt hier:

$$v(t) = a \cdot t \quad \text{und} \quad s(t) = \tfrac{1}{2} a t^2$$

Aus s = h = 1m folgt dann $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2m}{2\,\frac{m}{s^2}}} = 1\,s$

Und dies ergibt die Geschwindigkeit $v(1s) = 2\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 1s = 2\,\tfrac{m}{s}$.

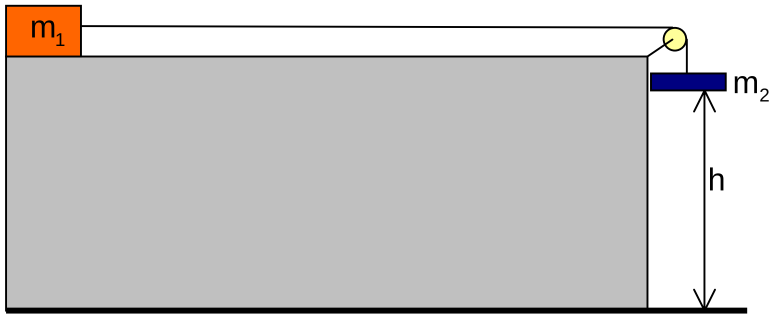
c) Die Gewichtskraft G_2 ist die Abtriebskraft. Ihre Wirkung verteilt sich auf drei Wirkungen: Der Anteil $F_2 = m_2 \cdot a$ wird dazu „verbraucht“ , um die Masse m_2 zu beschleunigen. $F_1 = m_1 \cdot a$ beschleunigt m_2 und $f \cdot m_1 g$ dient der Kompensation der Gleitreibung.
Also wird der Rest $F_1 = G_2 - m_2 a = 1N - 0{,}1kg \cdot 2\,\tfrac{m}{s^2} = 0{,}8\,N$ über das Seil an m_2 übertragen. Sie ist genau die Kraft, die übrig bliebt, um m_1 zu beschleunigen und um die Reibungskraft auszugleichen. Wir haben also 2 Möglichkeiten:

Bei m_1 benötigt: $F_S = m_1 \cdot a + f \cdot m_1 \cdot g = 0{,}2\,kg \cdot 2\,\tfrac{m}{s^2} + 0{,}2 \cdot 0{,}2\,kg \cdot 10\,\tfrac{m}{s^2} = 0{,}8\,N$

Bei m_2 übrig: $F_S = G_2 - m_2 a = 1N - 2\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}1kg = 0{,}8\,N$

Zur Seilkraft gibt es auf Seite 7 einen Kasten !

BEISPIEL 3: (Sehr ausführliche Aufgabe – Abiturvorbereitung Grundkurs)



Ein auf einer waagerechten Ebene liegender Körper wird mit einem masselosen Seil mit einem nach unten ziehenden Körper m_2 verbunden.
Es sei $m_1 = 1kg$ und $m_2 = 0,5$ kg.

a) Wir groß darf der Haftreibungskoeffizient f' höchstens sein, damit sich die Anordnung in Bewegung setzt ?

b) Nun sei f = 0,4. Berechne die Geschwindigkeit, mit der m_2 in h = 3 m Tiefe aufsetzt.

c) Welche Geschwindigkeit haben die Körper, wenn m_2 in halber Höhe ist ? Wie weit sind sie in der halben Fahrzeit gekommen ?.

d) Nach t = 1,5 s wird die Schnur durch einen geeigneten Mechanismus abgetrennt. Wie weit könnte dann m_1 noch gleiten, vorausgesetzt die Fahrbahnlänge reicht aus? Mit welcher Geschwindigkeit schlägt m_2 unten auf ?

e) Wie groß ist die Seilkraft, solange die Körper noch gekoppelt fahren ?

LÖSUNG:

a) Die Haftreibung wird dann überwunden, wenn die Antriebskraft mindestens so groß ist als die Haftreibungskraft:

$$G_2 > R_1' \Leftrightarrow m_2 g > f' \cdot m_1 \cdot g \Leftrightarrow f' < \frac{m_2}{m_1} = \frac{0,5\,kg}{1\,kg} = \frac{1}{2}$$

Ergebnis: Ist $f' < 0,5$, dann setzt sich die Anordnung in Bewegung.

b) Gleitreibung mit f = 0,4.

Erzielte Beschleunigung: $a = \frac{G_2 - R_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g - f m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - f m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$

$$a = \frac{0,5\,kg - 0,4 \cdot 1\,kg}{1,5\,kg} \cdot 10\,\tfrac{m}{s^2} = \frac{0,1}{1,5} \cdot 10\,\tfrac{m}{s^2} = \frac{1}{1,5}\,\tfrac{m}{s^2} = \frac{2}{3}\,\tfrac{m}{s^2} \approx 0,67\,\tfrac{m}{s^2}$$

Ich wollte zeigen, daß exaktes Bruchrechnen ztu einem exakten Wert führt. Greift man gleich zum Taschenrechner, erhält man den Näherungswert.

Der Körper startet aus der Ruhe und legt bis zum Aufsetzen die Strecke s = 3m zurück. Dafür gibt es die Formel

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 3}\,\tfrac{m}{s} = 2\,\tfrac{m}{s}$$

Sehen Sie, daß es sich lohnt, für a den genaueren Bruch zu verwenden ?

c) Die halbe Höhe bedeutet s = 1,5 m. Dies gibt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2}}\,\tfrac{m}{s} = \sqrt{2}\,\tfrac{m}{s} \approx 1{,}4\,\tfrac{m}{s^2}$$

Die Fahrzeit bis zum Aufsetzen ist:

$$v = a \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{v}{a} = \frac{2\,\frac{m}{s}}{\frac{2}{3}\,\frac{m}{s^2}} = 3\,s$$

In der Hälfte dieser Zeit legen die Körper diesen Weg zurück:

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}\,\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 s^2 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{9}{4}\,m = \tfrac{3}{4}\,m = 0{,}75\,m\,.$$

d) Nach $t_1 = 1{,}5$ s werden die Körper entkoppelt.
Zu diesem Zeitpunkt haben sie diese Strecke zurückgelegt:

$$s_1 = \tfrac{1}{2}at_1^{\,2} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}\,\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 s^2 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{9}{4}\,m = \tfrac{3}{4}\,m = 0{,}75\,m$$

und diese Geschwindigkeit erreicht:

$$v_1 = a \cdot t_1 = \tfrac{2}{3}\,\tfrac{m}{s^2} \cdot \tfrac{3}{2}\,s = 1\,\tfrac{m}{s}\,.$$

(d1) Körper m_1 führt dann eine Bremsbewegung aus mit der Bremsverzögerung

$$a = \frac{R_1}{m_1} = \frac{f \cdot m_1 \cdot g}{m_1} = f \cdot g = 4\,\tfrac{m}{s^2}$$

Bewegungsgleichungen dazu: $v(t) = 1\tfrac{m}{s} - 4\tfrac{m}{s^2} \cdot t$ (1)

Und $s(t) = 1\tfrac{m}{s} \cdot t - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$ (2)

Bedingung für den Haltepunkt: $v(T) = 0$, T = Bremszeit.
Aus (1) folgt dann: $0 = 1\tfrac{m}{s} - 4\tfrac{m}{s^2} \cdot T \;\Rightarrow\; 4\tfrac{m}{s^2} \cdot T = 1\tfrac{m}{s} \;\Rightarrow\; T = \tfrac{1}{4}\,s = 0{,}25\,s$
Aus (2) folgt dann der Bremsweg:

$$s\left(\tfrac{1}{4}s\right) = 1\tfrac{m}{s^2} \cdot \tfrac{1}{4}s - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot \tfrac{1}{16}s^2 = \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\right)m = \tfrac{1}{8}\,m = 0{,}125\,m$$

Anmerkung: Die umgekehrte Bewegung dieses Vorgangs ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus dem Haltepunkt zurück. Dafür gilt:

$$v = \sqrt{2as} \;\Rightarrow\; s = \frac{v^2}{2a} = \frac{1\frac{m}{s}}{8\frac{m}{s^2}} = \frac{1}{8}m = 0{,}125\,m$$

Dies geht sehr viel schneller.

(d2) Körper m_2 hat die Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 1\frac{m}{s}$ und fällt ab da frei, d.h. die Erdbeschleunigung wirkt auf ihn.

Bewegungsgleichungen: $v(t) = 1\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot t$ (3)

und $s(t) = 1\frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 1\frac{m}{s} \cdot t - 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ (4)

Der Körper m_2 hat bis zur Abkopplung bereits 0,75 m zurückgelegt. Die Gesamthöhe beträgt 3 m, also hat er noch die Fallstrecke s = 2,25 m zurück zu legen. Setzt man dies in (4) ein, folgt eine quadratische Gleichung:

$$2{,}25\,m = 1\frac{m}{s} \cdot t + 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Wir formen die Gleichung um und dividieren durch $\frac{m}{s^2}$, was einer Multiplikation mit $\frac{s^2}{m}$ entspricht: $2{,}25\,s^2 = 1\,s \cdot t + 5 \cdot t^2$ und ordnen die Gleichung:

$$5t^2 + 1\,s \cdot t - 2{,}25\,s^2 = 0$$

Die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen (siehe Vorwort) liefert:

$$t_{1,2} = \frac{-1\,s \pm \sqrt{1\,s^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2{,}25\,s^2)}}{10} = \frac{-1\,s \pm \sqrt{1\,s^2 + 20 \cdot 2{,}25\,s^2}}{10} = \frac{-1\,s \pm \sqrt{46\,s^2}}{10} \approx \begin{cases} 0{,}58\,s \\ (<0) \end{cases}$$

Damit können wir aus (3) die Geschwindigkeit berechnen:

$$v(0{,}58\,s) = 1\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}58 = 6{,}8\,\frac{m}{s}.$$

SEHR WICHTIG

e) Berechnung der Seilkraft.

Merke: Die Gewichtskraft von m_2 ist die Antriebskraft. Diese wird dazu benötigt, den Körper m_1 zu beschleunigen (F_1), m_2 zu beschleunigen (F_2) und die Gleichreibungskraft zu überwinden.

Das Seil muß nun das übertragen, was bei m_1 benötigt wird.

Das ist entweder der Rest, der bei m_2 übrig bleibt:

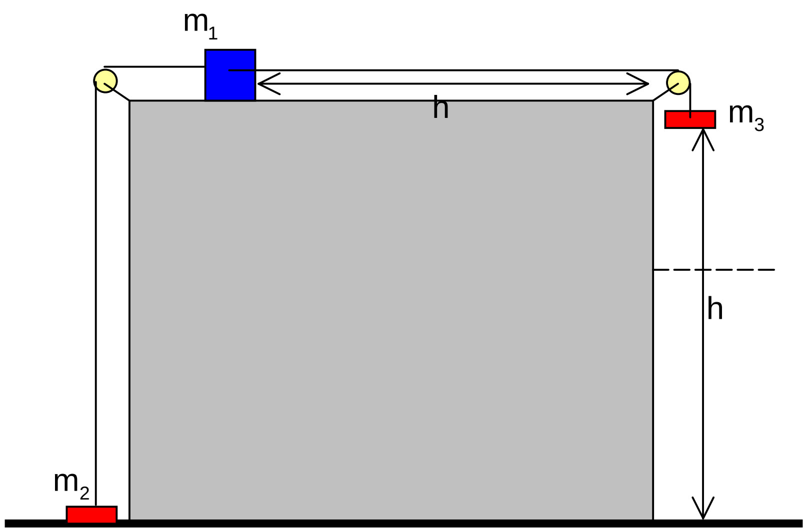
also $F_S = G_1 - m_1 \cdot a$

oder Beschleunigungskraft für m_1 plus Gleitreibungskraft:

also $F_S = m_2 \cdot a + f \cdot G_2$

Beide Rechnungen führen zu $F_S = 4{,}67\,N$!!!

BEISPIEL 4:



a) Unter welcher Bedingung für die Massen m_1 , m_2 und m_3 setzt sich die Anordnung trotz Haftreibung von selbst in Bewegung ? Was folgt daraus für den Haftreibungskoeffizienten f ' ?

Setzt sich die Anordnung in Bewegung, wenn f' = 0,4 ist und $m_3 = 2m_2$ und $m_1 = 3\,m_2$ ist ?

b) Es sei $m_3 = 2m_2$ und $m_1 = 3\,m_2$ und die Anordnung setze sich durch eine geeignete Maßnahme in Bewegung. Mit welcher Beschleunigung geschieht dies, wenn der Gleitreibungskoeffizient f = 0,2 ist ?

Welche maximale Geschwindigkeit kann die Anordnung erzielen, wenn h = 3 m ist ?

c) Nun wird rechts eine Platte so angebracht, so daß m_2 nach 0,75 m aufsetzt. Wie weit kann dann m_1 noch gleiten ? (Der Faden zwischen m_1 und m_3 soll nicht behindern)

d) Nach dem Halten setzt sich die Anordnung in umgekehrter Richtung in Bewegung. Berechne die Beschleunigung und die Geschwindigkeit von m_1, wenn m_3 wieder (durch einen Ruck) angehoben wird.

LÖSUNG:

Auf der Mathematik-CD